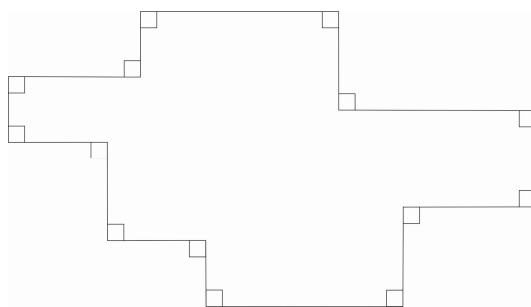


**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012**  
**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**CLASA a IX-a**

1. Pe tablă sunt scrise trei numere reale, nenule nu neapărat distincte. Când în locul lor s-au scris produsul lor, suma lor și suma produselor lor luate câte două, s-a constatat că pe tablă au apărut aceleași numere ca și cele inițiale. Care au fost numerele scrise inițial pe tablă?
2. a) Demonstrați că  $(1+a)^n \geq 1+na$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a \in (0, \infty)$ .  
b) Fie  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  o progresie aritmetică de rație  $r > 0$ , iar  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  o progresie geometrică de rație  $q > 1$ . Dacă  $a_1 = b_1 > 0$  și  $a_2 = b_2$  arătați că  $b_n \geq a_n$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  (folosiți eventual inegalitatea de la a)).
3. Fie ABCD un patrulater convex, P mijlocul segmentului  $[AB]$  și  $M \in [BC]$ ,  $N \in [AD]$  astfel încât  $\frac{BM}{BC} = \frac{AN}{AD} = \frac{1}{3}$ .  
a) Exprimați vectorii  $\overrightarrow{PM}$  și  $\overrightarrow{PN}$  în funcție de vectorii  $\overrightarrow{PA}$ ,  $\overrightarrow{PC}$ ,  $\overrightarrow{PD}$ .  
b) Demonstrați că mijloacele segmentelor  $[AB]$ ,  $[MN]$  și  $[CD]$  sunt puncte coliniare.
4. Zidul unei cetăți reprezintă o linie poligonală închisă (vezi figura de mai jos). Fiecare două segmente vecine ale acestei linii poligonale formează un unghi drept. Într-o noapte, un parașutist a aterizat lângă zidul cetății. Acesta nu știe dacă este în interiorul sau în exteriorul cetății. Ocolește zidul cetății și numără câte cotituri face la stânga și câte la dreapta într-un tur complet.



- a) Câte cotituri face parașutistul la dreapta și câte la stânga, dacă ocolește zidul astfel încât acesta să rămână mereu în dreapta sa, în ambele cazuri (ocolire interioară sau ocolire exterioară)?
- b) Cum deduce parașutistul dacă a aterizat în interiorul sau exteriorul cetății?

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012**  
**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**Clasa a X-a**

1. Un automobil se deplasează cu viteza de  $90 \text{ km/h}$  la vale, cu  $72 \text{ km/h}$  pe loc drept și cu  $60 \text{ km/h}$  la deal. În aceste condiții automobilul a parcurs distanța de la orașul  $A$  la orașul  $B$  în 5 ore, iar distanța de la orașul  $B$  la orașul  $A$  în 4 ore. Aflați distanța dintre  $A$  și  $B$ .
2. a) Demonstrați că  $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \dots \cdot \log_{2011} 2012 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .  
b) Fie  $z$  un număr complex, nenul, arătați că  $\frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{z} \in \mathbb{R}$ .
3. a) Demonstrați că  $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ , pentru orice  $x, y \in [0, \infty)$ .  
b) Demonstrați că  $x + \frac{1}{x} \geq 2$  și  $2^x \cdot 3^{\frac{1}{x}} + 2^{\frac{1}{x}} \cdot 3^x \geq 12$ , pentru orice  $x > 0$  (puteți utiliza și inegalitatea mediilor).  
c) Rezolvați în  $\mathbb{R}^*$ , ecuația  $2^x \cdot 3^{\frac{1}{x}} + 2^{\frac{1}{x}} \cdot 3^x + (\sqrt{6})^{x+\frac{1}{x}} = 18$ .
4. Punctele spațiului fizic obișnuit sunt colorate în mod arbitrar cu două culori.  
Demonstrați că există un segment ale cărui extremități și mijloc sunt la fel colorate.

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012**  
**Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**Clasa a XI-a**

1. Fie  $A = \{(x, y) / |x| + |y| \leq 5\}$

- a) Într-un reper ortogonal  $(xOy)$ , rezolvând inecuațiile corespunzătoare fiecărui cadran, reprezentați mulțimea  $A$ , prin hașurare.
- b) Să se demonstreze că oricum am alege 101 puncte din  $A$ , există cel puțin două dintre acestea la o distanță mai mică sau egală cu 1 (împărțind pătratul prin paralele la laturi).

2. Considerăm funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - x} + \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}$

Studiați existența limitei  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  pentru  $a = -\infty$ ,  $a = 0$ ,  $a = 1$  și  $a = \infty$ .

3. Fie  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

- a) Demonstrați că  $A^2 + A - 2I_3 = O_3$
- b) Demonstrați că  $A$  este inversabilă și determinați  $A^{-1}$ .
- c) Rezolvați în  $M_3(\mathbb{R})$ , ecuația  $AX = A^2 - I_3$ .

4. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  care verifică relația  $f(x - y) - xf(y) \leq 1 - x$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$

- a) Demonstrați că  $f(x) \leq 1$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
- b) Demonstrați că  $1 - \frac{1 - f(0)}{x} \leq f(x) \leq 1$ , pentru orice  $x > 0$ . Calculați  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .
- c) Determinați toate funcțiile  $f$  care verifică condiția dată.

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012**  
**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**Clasa a XII-a**

1. Pe  $G = (3, \infty)$  definim legea de compoziție  $x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3, \forall x, y \in G$ .
  - a) Să se demonstreze că  $(G, \circ)$  este grup abelian.
  - b) Calculați  $5 \circ 8'$ , unde  $8'$  este inversul lui 8 în  $G$ .
  - c) Demonstrați că, dacă  $H$  este subgrup al lui  $(G, \circ)$  care conține toate numerele naturale mai mari sau egale cu 4, atunci  $H$  conține toate numerele raționale  $q > 3$ .
2. Calculați  $\int_1^2 \frac{dx}{x(x^3 + 1)}$ .
3. Considerăm  $f : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$  o funcție derivabilă cu  $f(1) = 1$ , pentru care ordonata punctului de intersecție a axei  $Oy$  cu tangenta într-un punct oarecare al graficului funcției  $f$  este egală cu jumătate din ordonata punctului de tangență.
  - a) Demonstrați că  $xf'(x) = \frac{1}{2}f(x), x \geq 1$ .
  - b) Demonstrați că  $\int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \ln \sqrt{\frac{x}{a}}$ , pentru orice  $x \geq 1, a \geq 1$  fiind un număr fixat.
  - c) Determinați funcția  $f$ .
4. Se consideră în plan trei discuri disjuncte  $D_1, D_2, D_3$  de raze  $r_1, r_2, r_3$ . Notăm  $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$  și  $S$  aria lui  $D$ . Știind că proiecția lui  $D$  pe axele unui reper  $xOy$  sunt două segmente având suma lungimilor egală cu 1, se cere:
  - a) Arătați că  $S \leq \frac{1}{4}$ ;
  - b)  $r_1 + r_2 + r_3 \geq \frac{1}{4}$ ;
  - c)  $S \geq \frac{\pi}{48}$ .

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.